Roll No. ....

DD–2761

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Third (B)

(Discrete Mathematics)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक इकाई से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1\. (अ) भाषा की परिभाषा दीजिए। भाषा $L = \{a^i b^{2i} \mid i \geq 1\}$ के लिए व्याकरण की संरचना कीजिए।

Define language. Construct a grammar for the language $L = \{a^i b^{2i} \mid i \geq 1\}$.

(ब) एक चेसबोर्ड से यादृच्छ्या चार वर्गों को चुना जाता है। इन वर्गों के विकर्ण में होने की संभावना ज्ञात कीजिए।

Four squares are chosen at random from a chessboard. Find the probability that these squares lie in a diagonal.

(स) सिद्ध कीजिए :

$$^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$$

Prove that :

$$^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) इकाई भुजा के एक वर्ग के अन्दर कोई पाँच बिन्दु दिये गये हैं। दर्शाइए कि इनमें से कोई दो बिन्दु अधिकतम दूरी $\frac{\sqrt{2}}{2}$ के अन्दर हैं।

Show that if five points are selected in a square of unit sides then there are two points whose distance is at most $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ब) सम्बन्धों के संयोजन की परिभाषा दीजिए। यदि R^{-1} तथा S^{-1} क्रमशः सम्बन्धों R तथा S के प्रतिलोम हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Define composition of relations. If R^{-1} and S^{-1} be the inverse of the relation R and S respectively, then prove that :

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

(स) निम्नलिखित आसन्नता आव्यूह से निरूपित ग्राफ खींचिए :

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Draw the graphs represented by the following adjacency matrices :

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) पम्पिंग प्रमेयिका को लिखिए व उसे सत्यापित कीजिए।

State and prove Pumping Lemma.

(ब) मान लीजिए a तथा b दो संख्यात्मक फलन हैं। a तथा b का भागफल, जिसे $\frac{a}{b}$ से प्रकट करते हैं, एक संख्यात्मक फलन है जिसका r पर मान $\frac{a_r}{b_r}$ है। मान लीजिए $d = \frac{a}{b}$। दर्शाइये कि :

$$\Delta d_r = \frac{b_r \, \Delta a_r - a_r \, \Delta b_r}{b_r \, b_{r+1}}$$

Let a and b be two numeric functions. The quotient of a and b denoted by $\frac{a}{b}$ is a numeric function whose value at r is equal to $\frac{a_r}{b_r}$. Let $d = \frac{a}{b}$. Show that :

$$\Delta d_r = \frac{b_r \Delta a_r - a_r \Delta b_r}{b_r b_{r+1}}$$

(स) निम्नलिखित जनक फलन के संगत विविक्त संख्यात्मक फलन का निर्धारण कीजिए :

$$A(z) = \frac{1}{5 - 6z + z^2}$$

Determine the discrete numeric function corresponding the generating function :

$$A(z) = \frac{1}{5 - 6z + z^2}$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4\. (अ) पुनरावृत्ति सम्बन्ध :

$$9a_r - 6a_{r-1} + a_{r-2} = 0$$

को हल कीजिए, दिया गया है कि $a_0 = 0$ तथा $a_1 = 1$ ।

Solve the recurrence relation :

$$9a_r - 6a_{r-1} + a_{r-2} = 0$$

given that :

$$a_0 = 0$$

and $a_1 = 1$.

(ब) जनक फलन विधि से निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल कीजिए :

$$a_r - 2a_{r-1} + a_{r-2} = \frac{1}{4}2^r,\ r \geq 2$$

परिसीमा प्रतिबन्ध है :

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 1.$$

Solve by the method of generating function the recurrence relation :

$$a_r - 2a_{r-1} + a_{r-2} = \frac{1}{4}2^r,\ r \geq 2$$

with the boundary conditions :

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 1.$$

(स) दिखाइये कि योज्य संक्रिया में शून्य सहित सभी सम-पूर्णांकों का समुच्चय आबेली समूह होता है।

Show that the set of all even integers with zero is an abelian group in additive operation.

इकाई—5

(UNIT—5)

5\. (अ) मान लीजिए :

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$$

सम्बन्ध '|' द्वारा क्रमित हैं, जहाँ $x \mid y$ का अर्थ है 'x, y को विभाजित करता है'। दर्शाइये कि L के पूर्णांक 12 के सभी विभाजकों का समुच्चय D_{12} लैटिस (L, 1) का एक उपलैटिस है।

Let :

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$$

be ordered by the relation '|' where $x \mid y$ means 'x divides y'. Show that D_{12} the set of all divisors of the integer 12 of L is a sublattice of the lattice (L, 1).

(ब) स्विचन फलन :

$$F(x, y, z) = x\,y\,z + x\,y'z + x'y'z$$

को सरलीकृत स्विचन परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिए।

Replace the switching function :

$$F(x, y, z) = x\,y\,z + x\,y'z + x'y'z$$

by a simpler switching circuit.

(स) सत्यता सारणी की सहायता से सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन तुल्य हैं :

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

और $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$

Establish equivalence of the following statements with the help of truth table :

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

and $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$